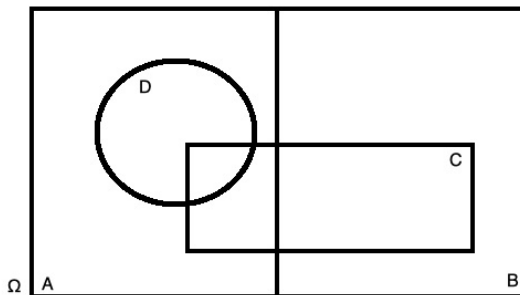


## Stochastik

### Musterlösung 1

1. a) Stelle die folgenden Ereignisse im angegebenen Venn-Diagramm dar:

- i)  $(C \cup D)^c$
- ii)  $(A \setminus D) \cap C^c$
- iii)  $(C \cap D) \cup (A^c \setminus C)$



b) Benutze die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung (S.6 im Buch) um die folgenden Rechenregeln ((1.2), (1.4) und (1.5) im Buch) zu zeigen: Seien  $A$  und  $B$  zwei Ereignisse mit  $B \subset A$ . Dann gilt

- i)  $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$
- ii)  $P(B) \leq P(A)$ .
- iii) Für beliebige Ereignisse  $C$  und  $D$  gilt:

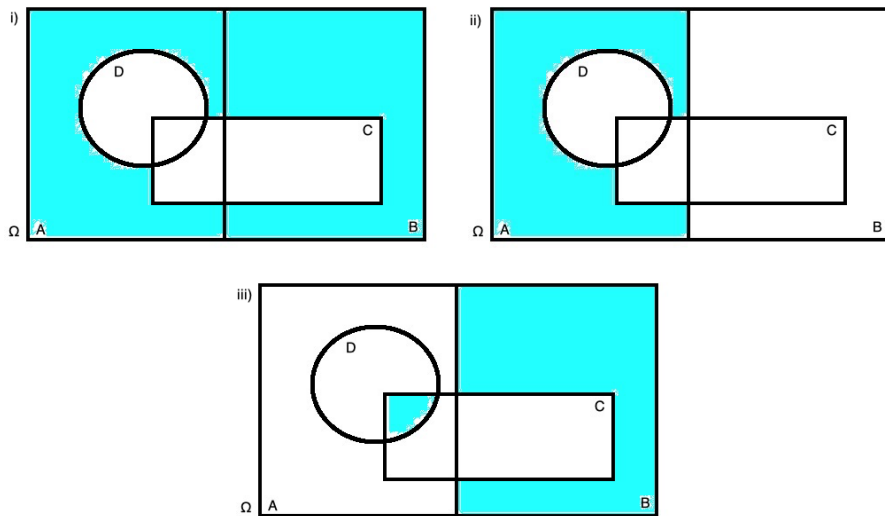
$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D)$$

**Tipp:** Für i) schreibe  $A = B \cup (A \setminus B)$  und beachte, dass  $B$  und  $A \setminus B$  disjunkt sind. Für iii) überlege wie  $C \cup D$  als disjunkte Vereinigung geschrieben werden kann und verwende  $D = (C \cap D) \cup (D \setminus C)$ .

**Lösung:**

a) Die Darstellung ist

**Bitte wenden!**



- b) i) Wegen  $B \subset A$  können wir  $A$  als disjunkte Vereinigung von  $B$  und  $A \setminus B$  schreiben:  $A = B \cup (A \setminus B)$ . Dann können wir (A3) anwenden und erhalten

$$P(A) = P(B) + P(A \setminus B)$$

welches wir direkt zu i) umformen können.

- ii)  $P(A) = P(B) + P(A \setminus B) \geq P(B)$  weil  $P(A \setminus B) \geq 0$ .  
 iii) Wir schreiben  $C \cup D$  als die disjunkte Vereinigung  $C \cup (D \setminus C)$  und erhalten mit (A3)

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D \setminus C)$$

Aber  $D$  ist die disjunkte Vereinigung von  $C \cap D$  und  $D \setminus C$  (Zeichnung!), daher gilt erneut mit (A3)

$$P(D) = P(C \cap D) + P(D \setminus C)$$

sodass wir  $P(D \setminus C)$  oben ersetzen können und iii) erhalten.

2. Wir werfen gleichzeitig einen roten und einen grünen Würfel und betrachten die folgenden Ereignisse:

$W_1$  = „Keine der beiden gewürfelten Zahlen ist grösser als 2.“

$W_2$  = „Der rote Würfel zeigt dieselbe Zahl wie der grüne Würfel.“

$W_3$  = „Die Zahl auf dem roten Würfel ist das Doppelte der Zahl auf dem grünen Würfel.“

$W_4$  = „Die Zahl auf dem roten Würfel ist um eins grösser oder kleiner als die Zahl auf dem grünen Würfel.“

**Siehe nächstes Blatt!**

- a) Wähle den Grundraum  $\Omega := \{(r, g) : r, g \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ . Identifiziere die obigen Ereignisse mit Teilmengen von  $\Omega$ .
- b) Beschreibe in Worten die Ereignisse  $W_1 \cup W_2$ ,  $W_3 \cap W_4$  und  $W_1^c \cap W_3^c$ .
- c) Von welchen der obigen Ereignisse kann man entscheiden, ob sie eintreten, wenn man die Würfel zwar beobachtet, aber farbenblind ist, so dass man rot und grün nicht unterscheiden kann?

**Tipp:** Der Grundraum kann verstanden werden als die Menge aller Paare der Zahlen von 1 bis 6, wobei die erste Komponente  $r$  für die Augenzahl des roten Würfels, die zweite Komponente  $g$  für die des Grünen steht.

**Lösung:**

- a) Es sind

$$W_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\},$$

$$W_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

= „Beide Würfel zeigen die gleiche Zahl.“

$$W_3 = \{(2, 1), (4, 2), (6, 3)\}$$

$$W_4 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6),$$

$$(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)\}$$

$$= \text{„Die beiden gewürfelten Zahlen unterscheiden sich um 1.“}$$

- b)  $W_1 \cup W_2$ : „Keine der beiden gewürfelten Zahlen ist grösser als 2 oder der rote Würfel zeigt dieselbe Zahl wie der grüne Würfel.“

$W_3 \cap W_4$ : „Die Zahl auf dem roten Würfel ist das Doppelte der Zahl auf dem grünen Würfel und ist zugleich um eins grösser oder kleiner als sie.“ (Sprich der Rote zeigt 2 und der Grüne 1.)

$W_1^c \cap W_3^c$ : „Mindestens eine von den beiden gewürfelten Zahlen ist grösser als 2 und die Zahl auf dem roten Würfel ist nicht das Doppelte der Zahl auf dem grünen Würfel.“

- c) Ein Farbenblinder kann nicht entscheiden, ob das Ereignis  $W_3$  eingetreten ist, da es in diesem Fall wichtig ist, dass man die beiden Würfel unterscheiden kann. Bei allen anderen genannten Ereignissen ist dies nicht nötig.

3. Es seien  $0 \leq j < k \leq n$  drei ganze Zahlen. Über einen Nachrichtenkanal werden  $n$  Signale übertragen. Jedes Signal wird entweder richtig oder falsch übertragen. Wir wählen als Wahrscheinlichkeitsraum  $\Omega$  die Menge der 0-1 Folgen der Länge  $n$  gemäss

$$\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \forall 1 \leq i \leq n : x_i \in \{0, 1\}\} = \{0, 1\}^n,$$

**Bitte wenden!**

wobei  $x_i = 1$  soviel bedeutet wie “ $i$ -tes Signal richtig übertragen” und  $x_i = 0$  “ $i$ -tes Signal falsch übertragen”.

Ferner betrachten wir folgende Ereignisse:

- $A$  : “Genau  $j$  Signale werden richtig übertragen”
- $B$  : “Mindestens  $k$  Signale werden richtig übertragen”
- $C$  : “Höchstens  $k$  Signale werden richtig übertragen”.

a) Schreibe die Ereignisse  $A$ ,  $B$  und  $C$  als Teilmengen von  $\Omega$  auf.

b) Beschreibe in Worten die Ereignisse  $B \cap C$ ,  $A \cap B$ ,  $A \cap C$ ,  $A^c$  und  $C^c$ .

**Lösung:**

a)

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \sum_{i=1}^n x_i = j\}$$

$$B = \{\omega \in \Omega \mid \sum_{i=1}^n x_i \geq k\}$$

$$C = \{\omega \in \Omega \mid \sum_{i=1}^n x_i \leq k\}$$

b)  $B \cap C$ : “Genau  $k$  Signale werden richtig übertragen.”

$A \cap B$ : Das ist die leere Menge.

$A \cap C$ : “Genau  $j$  Signale werden richtig übertragen.”

$A^c$ : “Es werden entweder weniger oder mehr als  $j$  Signale richtig übertragen.”

$C^c$ : “Es werden mindestens  $k + 1$  Signale richtig übertragen.”

4. Wir spielen das Brettspiel „Siedler von Catan“. Das Spielbrett besteht aus Landschaften, die mit ganzen Zahlen zwischen 2 und 6 bzw. 8 und 12 versehen sind. In jeder Runde wird mit zwei Würfeln gewürfelt und diejenige Landschaften bringen Erträge, deren Zahl mit der Summe der Augenzahlen übereinstimmt.

a) Benutze den Grundraum  $\Omega$  aus Aufgabe 2 (siehe Tipp). Identifiziere das Ereignis „die 9er Landschaften bringen Erträge“ mit einer Teilmenge von  $\Omega$ .

b) Die Landschaften mit welcher Augenzahl bringen voraussichtlich am häufigsten bzw. am seltensten Ertrag? Warum?

**Siehe nächstes Blatt!**

- c) Ein Spieler hat die Wahl: Entweder erhält er in der Zukunft den Ertrag einer 8er Landschaft oder all die Erträge von einer 12er und einer 4er Landschaft. Was soll er wählen und warum? (Wir nehmen an, dass die Charakteristik der Landschaft i.e. die Sorte der „Rohstoffen“ bei der Entscheidung keine Rolle spielt.)

**Tipp:** Die Würfel sind zwar nicht unterschiedlich gefärbt, gedanklich müssen sie trotzdem unterschiedet werden. Gäbe es einen roten und einen grünen Würfel, wäre die Wahrscheinlichkeit einer 9 als Summe der Augenzahlen zum Beispiel trotzdem das gleiche. Deswegen soll man den Grundraum aus Aufgabe 1 verwenden.

**Lösung:**

- a) Die gesuchte Teilmenge ist:

$$\Omega_9 = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\},$$

- b) Man geht wie folgt vor: Der Grundraum hat 36 Elemente, die kann man nach Summe der Augenzahlen in 11 Gruppen ( $\Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_{12}$ ) einteilen. Hierbei stehen die Indizes jeweils für die Summe der Augenzahlen. Man zählt dann die Elemente von den  $\Omega_i$ -s zusammen und findet,  $|\Omega_2| = 1, |\Omega_3| = 2, \dots, |\Omega_7| = 6, |\Omega_8| = 5, \dots, |\Omega_{12}| = 1$ .

Es gilt natürlich dass je mehr Elemente eine Menge hat, voraussichtlich desto häufiger wird die entsprechende Zahl als Summe der Augenzahlen vorkommen. Präziser, mithilfe des Laplace-Modells (Seite 7, Skript) können wir die Wahrscheinlichkeiten explizit Angeben:  $P(\Omega_2) = 1/36, P(\Omega_3) = 2/36, \dots, P(\Omega_7) = 6/36, P(\Omega_8) = 5/36, \dots, P(\Omega_{12}) = 1/36$ . Die Antwort ist also: Die ertragreichsten Landschaften sind die 6er bzw. die 8er, und die ärmsten sind die 2er bzw. 12er. Beachte dabei, dass es keine 7er Landschaften gibt.

- c) In Anlehnung auf Teilaufgabe b) wissen wir  $|\Omega_8| = 5, |\Omega_4| = 3$  und  $|\Omega_{12}| = 1$ . Somit kann man folgende Wahrscheinlichkeiten berechnen (siehe Laplace-Formel, Seite 7, Skript):  $P(\Omega_8) = 5/36$  und da  $\Omega_4$  und  $\Omega_{12}$  disjunkt sind (siehe (A3) Seite 5, Skript)  $P(\Omega_4 \cup \Omega_{12}) = P(\Omega_4) + P(\Omega_{12}) = 4/36$ . Da die Wahrscheinlichkeit des Rohstoffeinkommens in der ersten Variante somit höher ist, soll man diese Variante wählen.